Ejercicios de Análisis Complejo

Representación conforme y transformaciones de Möbius

1. Pruébese que toda transformación de Möbius, distinta de la identidad, tiene uno o dos puntos fijos en $\overline{\mathbb{C}}$. Determínense todas las las transformaciones de Möbius que tienen:

   a) ∞ como único punto fijo,

   b) 0 e ∞ como puntos fijos.

2. Dados dos números complejos distintos a y b, hállese la ecuación general de todas las circunferencias respecto de las cuales a y b son simétricos. Pruébese que cualquier circunferencia que pase por a y b es ortogonal a cualquier circunferencia respecto de la cual a y b son simétricos.

3. Determínense todos los isomorfismos conformes del primer cuadrante sobre el disco unidad.

4. Obténganse un isomorfismo conforme del primer cuadrante sobre la mitad superior del disco unidad.

5. Determínese, en cada uno de los siguientes casos, la imagen del dominio Ω por la transformación φ:

   a) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$, $\varphi(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$

   b) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \ \operatorname{Im} z > 0\}$, $\varphi(z) = \dfrac{2z-i}{2+iz}$

   c) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}\}$, $\varphi(z) = \dfrac{z}{z-1}$

   d) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$, $\varphi(z) = \dfrac{z-1}{z-2}$

   e) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$, $\varphi(z) = \dfrac{z}{z-1}$

6. Encuéntrese una transformación de Möbius que aplique la circunferencia unidad en una recta vertical, el punto 4 en 0 y la circunferencia de centro 0 y radio 2 en sí misma.

7. Encuéntrese una transformación de Möbius que aplique la circunferencia unidad sobre la de centro 1 y radio 2, deje fijo el punto -1 y lleve el punto 0 al i.

8. Pruébese que el dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \ |z-2| > 1\}$ es isomorfo al anillo $A(0;\rho,1)$ para conveniente valor de ρ con $0 < \rho < 1$.

9. Pruébese que el dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 5, \ |z-2| > 2\}$ es isomorfo al anillo $A(0;\rho,1)$ para conveniente valor de ρ con $0 < \rho < 1$.

10. Sea φ una transformación de Möbius con dos puntos fijos $a, b \in \mathbb{C}$. Pruébese que φ puede expresarse de la forma:
$$\frac{\varphi(z)-a}{\varphi(z)-b} = \lambda \frac{z-a}{z-b}$$
para conveniente valor de $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Dedúzcase que:

    a) Toda recta o circunferencia que pase por a y b se aplica por φ en sí misma si, y sólo si, λ es real.

    b) Toda recta o circunferencia respecto de la cual a y b sean puntos simétricos se aplica por φ en sí misma si, y sólo si, $|\lambda| = 1$.

11. Hállese una transformación de Möbius que deje invariante la circunferencia de centro 0 y radio 5 y tenga 5 como único punto fijo.

12. Constrúyase un isomorfismo conforme de Ω_1 sobre Ω_2 en cada uno de los siguientes casos:

    a) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| < \pi/4\}$, $\Omega_2 = D(0,1)$

    b) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < \sqrt{2}, |z+1| < \sqrt{2}\}$, $\Omega_2 = D(0,1)$

    c) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, |z-1| < \sqrt{2}\}$, $\Omega_2 = D(0,1)$

    d) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$

    e) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \frac{\pi}{3}, 0 < |z| < 1\}$, $\Omega_2 = D(0,1)$

    f) $\Omega_1 = D(0,1) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z + i\sqrt{3}| > 2\}$, $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$

    g) $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$, $\Omega_2 = D(0,1)$

    h) $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$, $\Omega_2 = D(0,1)$

    i) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |2z-1| > 1\}$, $\Omega_2 = D(0,1)$

13. Sea f una función holomorfa en el disco unidad, verificando que $f(0) = 1$, $f'(0) = 2i$ y $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$ para todo z en $D(0,1)$. Pruébese que $f(z) = \dfrac{1+iz}{1-iz}$ para todo $z \in D(0,1)$

14. Sean $0 < r < R$, $0 < s < S$ y a, b dos números complejos. Pruébese que para que exista una transformación de Möbius que aplique el anillo $A(a; r, R)$ sobre el anillo $A(b; s, S)$ es condición necesaria y suficiente que $R/r = S/s$.

15. ¿Puede existir un isomorfismo conforme entre los anillos $A(0; 0, 1)$ y $A(0; 1, 2)$? Justifíquese la respuesta.

16. Sean f y g transformaciones de Möbius ninguna de ellas igual a la identidad. Estúdiese la relación existente entre las afirmaciones siguientes:

    a) f y g conmutan, es decir, $f(g(z)) = g(f(z))$ para todo $z \in \overline{\mathbb{C}}$.

    b) f y g tienen los mismos puntos fijos.

17. Pruébese que una función holomorfa del disco unidad en sí mismo que tiene dos puntos fijos es igual a la identidad.

18. Constrúyase un isomorfismo conforme del dominio

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1,\ |z-i| < 1\}$$

sobre el disco unidad.

19. Pruébese que, para conveniente valor de ρ con $0 < \rho < 1$, el dominio

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, |z-1| > \rho\}$$

es isomorfo al anillo $A(0;1,2)$ y descríbanse todas las transformaciones de Möbius que aplican Ω sobre $A(0;1,2)$.

20. Constrúyase un isomorfismo conforme del dominio

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2,\ |z-\sqrt{2}| < \sqrt{2}\}$$

sobre la mitad del disco unidad abierto que está contenida en el semiplano superior.

21. Constrúyase un isomorfismo conforme del dominio

$$\Omega = \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) < 0,\ \left|z - \frac{1-i}{2}\right| > \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

sobre el disco unidad abierto.

22. Constrúyase un isomorfismo conforme del dominio

$$\Omega = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ \left|z + \frac{5}{4}i\right| > \frac{3}{4}\right\}$$

sobre la mitad del disco unidad abierto que está contenida en el semiplano superior.

23. Constrúyase un isomorfismo conforme, φ, del dominio

$$\Omega = \left\{z \in \mathbb{C}^* : |\arg(z)| < \frac{\pi}{4}\right\}$$

sobre el disco unidad, verificando que $\varphi(1) = 0$ y $\varphi(2) = \frac{3}{5}$. Justifíquese que tal isomorfismo es único.